

# Indice

Prefazione	v
Capitolo 1. Successioni e serie di funzioni	1
1. Successioni di funzioni	1
1.1. Convergenza puntuale e convergenza uniforme	1
1.2. Condizioni di Cauchy	4
1.3. Proprietà della convergenza uniforme	5
2. Serie di funzioni	11
2.1. Convergenza e convergenza uniforme	12
2.2. Condizioni di Cauchy	13
2.3. Convergenza totale	14
2.4. Proprietà della convergenza uniforme	16
3. Serie di potenze	21
4. Serie di Taylor	29
5. Sviluppi notevoli	32
6. Serie di Fourier	39
6.1. Funzioni periodiche e serie trigonometriche	39
6.2. Serie di Fourier: forma reale	41
6.3. Serie di Fourier: forma complessa	45
Esercizi proposti	46
Capitolo 2. Funzioni di più variabili	49
1. Spazi euclidei	49
2. Funzioni tra spazi euclidei	52
2.1. Operazioni tra funzioni	53

2.2.	Simmetrie	54
2.3.	Funzione composta	54
2.4.	Funzione inversa	54
2.5.	Estremi assoluti e relativi delle funzioni	54
3.	Limiti per funzioni di più variabili	55
4.	Funzioni continue	61
4.1.	Continuità e connessione	62
4.2.	Continuità e compattezza	65
4.3.	Funzioni hölderiane	70
Capitolo 3. Spazi metrici e spazi normati		71
1.	Spazi metrici	71
1.1.	Funzioni tra spazi metrici	76
1.2.	Compattezza	78
1.3.	Connessione	79
1.4.	Completezza	80
1.5.	Distanza tra sottoinsiemi di uno spazio metrico	86
2.	Spazi normati	87
Capitolo 4. Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$		93
1.	Derivata delle funzioni scalari	93
2.	Differenziale primo di una funzione scalare	96
3.	Derivate e differenziale primo delle funzioni vettoriali	101
3.1.	Differenziale della funzione composta	103
4.	Derivate e differenziali di ordine superiore	104
5.	Approssimazione di funzioni	109
5.1.	La Formula di Taylor	109
5.2.	Funzioni omogenee	112
6.	Estremi locali liberi per funzioni di più variabili	115
6.1.	Una condizione del primo ordine	115
6.2.	Condizioni del secondo ordine	116
Esercizi proposti		125

Capitolo 5. Funzioni implicite	127
1. Il caso scalare	127
2. Il caso vettoriale	133
3. Inversione di applicazioni	137
4. Alcuni cambi di variabile	140
4.1. Coordinate polari nel piano	140
4.2. Coordinate cilindriche	142
4.3. Coordinate polari in $\mathbb{R}^n$	142
4.4. Cambi di coordinate noti dalla Geometria euclidea	144
Esercizi proposti	145
 Capitolo 6. Misura secondo Lebesgue	 147
1. Successioni di insiemi	147
2. Definizione di misura secondo Lebesgue	148
2.1. Misura degli intervalli e dei plurintervalli	148
2.2. Misura degli aperti limitati	152
2.3. Misura degli insiemi compatti	157
2.4. Misura degli insiemi limitati	161
2.5. Misura degli insiemi qualsiasi	168
3. Funzioni misurabili	177
3.1. Definizione di funzione misurabile	177
3.2. Algebra delle funzioni misurabili	179
 Capitolo 7. Integrazione secondo Lebesgue	 185
1. Integrale di Lebesgue	185
1.1. Definizione di integrale	185
1.2. Funzione integrale e proprietà dell'integrale	191
2. Estensione dell'integrale di Lebesgue	198
2.1. Definizione di integrale	198
2.2. La funzione integrale e le proprietà dell'integrale	205
3. Integrali dipendenti da parametro	211
4. Formule di riduzione	219

4.1.	Formula di riduzione in domini piani	221
4.2.	Formule di riduzione in domini dello spazio	226
4.3.	Volume dei solidi di rotazione	229
4.4.	Applicazione alla trasformata di Fourier	232
5.	Cambiamento di variabili	232
5.1.	Un'applicazione alla trasformata di Fourier	238
	Esercizi proposti	239
Capitolo 8. Serie di Fourier in $L^2$		241
1.	Funzioni di quadrato sommabile	241
2.	Sistemi ortonormali	244
Capitolo 9. Cenni di Geometria delle curve		249
1.	Curve regolari e generalmente regolari	249
1.1.	Definizione di curva	249
1.2.	Rappresentazione cartesiana e parametrica	252
1.3.	Vettore tangente a una curva regolare	253
2.	Cambi di parametro e orientamento di una curva regolare	254
3.	Curve rettificabili e loro lunghezza	255
4.	Ascissa curvilinea	261
5.	Alcuni esempi	262
5.1.	La cicloide	262
5.2.	L'asteroide	264
5.3.	La trattrice	264
5.4.	La cardioide	267
5.5.	La spirale logaritmica	268
5.6.	La finestra di Viviani	269
6.	Integrali curvilinei	269
Capitolo 10. Forme differenziali		273
1.	Definizione di forma differenziale lineare	273
2.	Integrale curvilineo di una forma differenziale	274
3.	Forme differenziali esatte	276

4. Forme differenziali chiuse	282
4.1. Aperti stellati e Teorema di Poincaré	285
4.2. Aperti semplicemente connessi e forme differenziali esatte	289
5. Forme di grado superiore al primo	292
6. Teorema di Gauss	295
Esercizi proposti	302
Capitolo 11. Cenni di Geometria delle superfici	305
1. Superfici regolari	305
2. Esempi di superfici regolari	307
3. Piano tangente a una superficie regolare	310
4. Superfici equivalenti e superfici orientabili	315
5. Area di una superficie regolare	317
6. Superfici generalmente regolari	319
7. Integrali di superficie	320
Esercizi proposti	322
Capitolo 12. Estremi vincolati per funzioni di più variabili	325
1. Definizione	325
2. Funzioni di due variabili e vincolo scalare	326
2.1. Condizioni necessarie	326
2.2. Condizione sufficiente	331
3. Funzioni di più variabili e vincolo scalare	332
4. Funzioni di più variabili e vincolo vettoriale	333
Esercizi proposti	336
Capitolo 13. Equazioni differenziali	339
1. Definizioni	339
2. Il problema di Cauchy	341
2.1. Equazione integrale di Volterra	343
2.2. Esistenza e unicità locale	344
2.3. Esistenza e unicità globale	349
2.4. Dipendenza continua dai dati	351

3. Equazioni e sistemi differenziali lineari	353
3.1. Sistemi lineari	353
3.2. Equazioni lineari di ordine superiore al primo	358
3.3. Sistemi lineari a coefficienti costanti	363
3.4. Equazioni lineari a coefficienti costanti	373
4. Alcuni metodi risolutivi	379
4.1. Equazioni a variabili separabili	379
4.2. Equazioni di tipo omogeneo	383
4.3. Equazioni lineari di primo ordine	391
4.4. Equazione differenziale di Bernoulli	393
4.5. Equazione differenziale di Eulero	396
4.6. Equazioni differenziali esatte	399
4.7. Equazioni del secondo ordine. Alcuni casi particolari	402
5. Risoluzione mediante serie di potenze	404
Esercizi proposti	405